



М + КОЛОКВИУМ

ОБОБЩЕНИЕ НА ЕДНА ЗАДАЧА ОТ МОСКОВСКАТА ОЛИМПИАДА

Владимир Барзов, ученик в 8 клас, СМГ

На XXII Московска математическа олимпиада, проведена през 1960 г. (вж. [1]) за участниците от X клас е поставена следната задача:

Числото A се дели на $1, 2, 3, \dots, 9$. Да се докаже, че ако A е представено като сбор на естествени числа, по-малки от 10: $2A = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, то измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_k$ могат да се изберат няколко така, че сборът им да е равен на A .

В цитирания сборник липсва решение или упътване, въпреки че задачата не изглежда лесна. В обобщението на тази задача замества числото 9 с произволно естествено число $n > 6$. Съответната задача гласи така:

Числото A се дели на $1, 2, 3, \dots, n$, където $n > 6$. Да се докаже, че ако $2A$ е представено като сбор на естествени числа, по-малки от $n + 1$, то измежду числата $a_1, a_2, \dots, a_k$ могат да се изберат няколко така, че сборът им да е равен на A .

Условието A да се дели на $1, 2, 3, \dots, n$ означава, че A е общо кратно на тези числа. Да означим с $H(n)$ най-малкото общо кратно на числата $1, 2, \dots, n$.

Лема. При $n \geq 5$ е изпълнено неравенството

$$(1) \quad H(n) \geq \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24}.$$

Доказателство. Числото $H(n)$ се дели на всяко от числата $n, n-1, n-2, n-3$ и $n-4$. Да означим с $H'(n)$ най-малкото общо кратно на тези числа. Тъй като $H(n) \geq H'(n)$ достатъчно е да покажем, че

$$(1') \quad H'(n) \geq \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

Разсъждаваме по следния начин. Произведението $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ е общо кратно на числата $n, n-1, n-2, n-3$ и $n-4$. За да получим от това кратно най-малкото общо кратно, трябва да го разделим на всеки от най-големите общи делители на различните двойки измежду разглежданите числа. Тези двойки не могат да имат други общи делители, освен числата 2, 3 и 4. Това следва от очевидните равенства

$n - (n-1) = 1$	$(n-1) - (n-2) = 1$	$(n-2) - (n-3) = 1$
$n - (n-2) = 2$	$(n-1) - (n-3) = 2$	$(n-2) - (n-4) = 2$
$n - (n-3) = 3$	$(n-1) - (n-4) = 3$	$(n-3) - (n-4) = 1$
$n - (n-4) = 4$		

В най-неблагоприятния случай може да има една двойка с най-голям общ делител 4, две двойки с най-голям общ делител 2 и една двойка с най-голям общ делител 3. Лесно се съобразява, че това е случаят, когато n се дели на 12. В този случай за получаване на най-малкото общо кратно на числата $n, n-1, n-2, n-3$ и $n-4$, произведението им трябва да се раздели на $2.3.4 = 24$, т.е.

$$H'(n) = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

В останалите случаи (т.е. когато n не се дели на 12) произведението трябва да се раздели или на 2, или на $2.3 = 6$ или на $2.4 = 8$, или на $3.4 = 12$. Следователно винаги е изпълнено неравенството (1).

Пристъпваме към решаването на обобщената задача.

В представянето $2A = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ да групираме единиците, двойките, ..., n -иците, като пишем

$$2A = b_1.1 + b_2.2 + \dots + b_n.n,$$

където $b_i, i = 1, 2, \dots, n$ е броят на i -иците в представянето на $2A$. Да означим с q индекса на най-голямото от числата b_i или на едно от най-големите. Лесно се получава оценка отдолу за b_q :

$$2A \leq b_q(1 + 2 + 3 + \dots + n) = b_q \frac{n(n+1)}{2},$$

откъдето

$$b_q \geq \frac{4A}{n(n+1)}.$$

Тъй като по условие A се дели на всяко от числата $1, 2, \dots, n$, то $A \geq H(n)$ и следователно

$$(2) \quad b_q \geq \frac{4H(n)}{n(n+1)}.$$

По-нататък ще използваме съществено оценката (2).

Случаят, когато $b_q.q \geq A$ води веднага до решение на задачата. Наистина, щом $q \in \{1, 2, \dots, n\}$, то по условие q/A и следователно можем да изберем измежду равните събираеми q толкова на брой, че сборът им да е точно равен на A .

По-труден е случаят, когато $b_q.q < A$. В този случай да отнесем всичките тези b_q на брой равни събираеми q към група I, а с II да означим групата на останалите събираеми. С прехвърляния на събираеми от група II в група I след определен брой ходове сборът на числата в група I ще стане равен на $A - Q$ за някое $Q \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Тогава сборът на числата в група II ще бъде равен на $A + Q$. Да означим с $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ броят на числата i в група II. Тогава

$$A + Q = c_1.1 + c_2.2 + \dots + c_n.n.$$

Да разделим всяко от числата $c_i, i = 1, 2, \dots, n$ на q с остатък, т.е. да го представим във вида

$$c_i = d_i.q + r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

където $d_i \geq 0$ е цяло число, а $0 \leq r_i \leq q-1$.

Тъй като q/A , то $A = zq$ за някое z . Сборът на числата в група II е $zq + Q$ и махаме цяло кратно на q единици от тях, така, че сборът на останалите числа в група II да бъде $z'q + Q$, където $0 \leq z' \leq n-1$. Ако при тази операция се изчерпят единиците в група II, извършваме аналогична операция с двойките. Ако се изчерпят двойките, продължаваме с тройките и т.н. Има две възможности: а) при махането на цяло кратно i -ци, да стигнем

до група II, сборът на числата в която е $z'q + Q$ с $0 \leq z' \leq n-1$; 6) да стигнем до група II с точно r_1 единици, r_2 двойки, ..., r_n n -тици. Тъй като $r_i \leq q-1$, $i = 1, 2, \dots, n$, можем да получим следната оценка отгоре за сбора $z'q + Q$ на числата в група II:

$$z'q + Q = r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 2 + \dots + r_n \cdot n \leq (q-1)(1 + 2 + \dots + n).$$

Като пренебрегнем Q , получаваме неравенството

$$z'q \leq \frac{1}{2}(q-1)n(n+1).$$

Оттук получаваме оценката:

$$z' \leq \frac{q-1}{2q}n(n+1).$$

Можем още малко да огрубим тази оценка, като заместим q с n . Наистина, от $q \leq n$ следва $\frac{q-1}{q} \leq \frac{n-1}{n}$ и следователно $z' \leq \frac{1}{2}(n-1)(n+1)$.

Лесно се вижда, че вторият случай обхваща и първия, понеже $n-1 \leq \frac{1}{2}(n-1)(n+1)$. Следователно и в двата случая сборът на числата от група II е равен на $z'q + Q$, $z' \in \left[0; \frac{1}{2}(n-1)(n+1)\right]$.

Останалите в група II числа обединяваме с числата от първоначалната група I. Сборът на числата в новополучената група е равен на $A - Q + z'q + Q = z'q + A$. Сигурно е, че в тази група има поне b_q на брой числа q . Ако $b_q \geq z'$, то можем да махнем точно z' от тях и да получим група числа със сбор равен точно на A . От (2) следва, че за верността на неравенството $b_q \geq z'$ е достатъчно да е изпълнено неравенството

$$\frac{4H(n)}{n(n+1)} \geq \frac{(n+1)(n-1)}{2},$$

т.е. неравенството

$$(3) \quad H(n) \geq \frac{1}{8}(n+1)^2n(n-1),$$

където $H(n)$ е най-малкото общо кратно на числата $1, 2, \dots, n$.

За $n = 6$ неравенството (3) не е вярно, но лесно се проверява, че то е изпълнено за $n = 7, 8, 9$ и 10 .

Ще докажем, че (3) е вярно за всяко $n \geq 11$. Наистина, като използваме оценката (1), достатъчно е да докажем неравенството

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \geq \frac{1}{8}(n+1)^2n(n-1),$$

което е еквивалентно на

$$(n-2)(n-3)(n-4) \geq 3(n+1)^2.$$

Последното неравенство се проверява за $n = 11$, а за $n \geq 12$ то е очевидно вярно, тъй като може да се запише във вида

$$n^2(n-12) + (20n+27) \geq 0.$$

С това поставената обобщена задача е напълно решена за $n > 6$.

Случаят $n = 6$ е открит.

Изказвам благодарността си към проф. Ив. Димовски за поставянето на задачата и за окончателното оформяне на статията.

Литература

[1] А. А. ЛЕМАН (съставител) *Сборник задач московских олимпиад*. „Просвещение“, Москва, 1965

