

Неправилни числа

Владимир В. Барзов

В доклада става дума за доказване съществуването на числа с фиксирана сума на цифрите и делителни свойства.

1 Обобщено представяне

Всяко естествено число притежава - и то единствено - десетично представяне. По същество това е низ от символи (цифри), който има стойност - самото число. Какво би се случило, ако разгледаме цифрите като числа и естествено премахнем ограничението тези числа да са по-малки от 10? Ето какво...

На всяко естествено число a съпоставяме символния низ $\mathbf{a} = \overline{a_t a_{t-1} \dots a_1 a_0}$ от цели неотрицателни числа a_i , ако $a_t > 0$ и

$$a = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots 10^t a_t.$$

Такъв низ наричаме „представяне„ на a . Това, което отличава едно представяне на a от обичайното му десетично представяне, е липсата на изискването $a_i < 10$. В този смисъл едно естествено число може да има няколко представяния, едно от които разбира се е и познатото ни десетично. Обратно - „стойност„ на един низ $\overline{a_t a_{t-1} \dots a_1 a_0}$ ще наричаме числото $a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \dots 10^t a_t$.

Да вземем произволно представяне $\mathbf{a}$ на a и да дефинираме

$$S(\mathbf{a}) = a_0 + a_1 + \dots + a_t.$$

Ако в този низ $t > 0$ и заменим a_t с $a_t - 1$, а a_{t-1} с $a_{t-1} + 10$, (и евентуално премахнем първата „нула„, ако такава възникне) получаваме друго представяне $\mathbf{a}'$ на същото число a , за което обаче $S(\mathbf{a}') = S(\mathbf{a}) + 9$. Тази процедура можем да повтаряме докато стигнем до „най-простото„ едноцифрено представяне $\mathbf{a} = \overline{a}$ на a .

Обратно - ако за някое $i \geq 0$ е изпълнено $a_i \geq 10$, то заменяйки a_i с $a_i - 10$ и a_{i+1} с $a_{i+1} + 1$ (евентуално при $i = t$ добавяме на първо място числото $a_{t+1} = 1$) получаваме отново представяне $\mathbf{a}'$ на a , за което $S(\mathbf{a}') = S(\mathbf{a}) - 9$. След неколккратно повторение на тази процедура стигаме до обичайното десетично представяне, което е минимално по отношение на сумата от числата в низа.

Сега да дефинираме $s(a)$ като сумата от цифрите в десетичното представяне на a . Докажем, че

Наблюдение [1] за всяко число $l \in [s(a), a]$, за което $l \equiv a \equiv s(a) \pmod{9}$, съществува представяне на a със сума на „цифрите„ точно l .

Да обърнем малко внимание и на делимостите - ще докажем следното твърдение:

Наблюдение [2] за всяко представяне $\mathbf{a}$ на a и естествено k , взаимно просто с 10, можем да намерим число b , такова че $b \equiv a \pmod{k}$ и $S(\mathbf{a}) = s(b)$.

Действително - нека $j > 0$ е такова, че $10^j \equiv 1 \pmod{k}$. Такова съществува - примерно $\varphi(k)$. Сега да изберем произволно число $a_i > 1$ от представянето $\overline{a_t a_{t-1} \dots a_1 a_0}$ на a (ако такова няма, то $b = a$ вършии работа, понеже цифрите му са само единици и нули). Подбираме достатъчно голямо r , така че $rj + i > t$, след което заменяме a_i с $a_i - 1$ и полагаме $a_{rj+i} = 1, a_{rj+i-1} = a_{rj+i-2} = \dots a_{t+1} = 0$. В резултат получаваме символен низ $\mathbf{a}'$ със стойност a' и свойствата:

$$S(\mathbf{a}') = S(\mathbf{a}), \quad a' \equiv a \pmod{k}.$$

Повтаряйки тази операция ще получим редица низове, последният от които се състои единствено от единици и нули (забележете, че процедурата е крайна). Ако стойността му е b , то това число е търсеното, понеже $S(\mathbf{b}) = s(b)$.

В случай, че k/a , изискването в наблюдение [2]: $(k, 10) = 1$ може да отпадне - достатъчно е да разсъждаваме за числото k_1 , такова че $k = 2^\alpha 5^\beta k_1, (k_1, 10) = 1$. Тогава от k_1/b ще следва $k/b' = 10^{\max(\alpha, \beta)} b$ и тъй като $s(b') = s(b) = S(\mathbf{a})$, всичко е наред. Да го формулираме начисто:

Наблюдение [2'] за всяко представяне $\mathbf{a}$ на a и дадено k , делящо a , можем да намерим число b , такова че k/b и $S(\mathbf{a}) = s(b)$.

Приложение на последното наблюдение е следната задача от шортлиста на IMO'99:

Задача 1 Дадено е естествено число k неделящо се на 3. Да се докаже, че за всяко естествено число $n \geq k$ съществува естествено число N със сума на цифрите n , делящо се на k .

Решение: Ще намерим представяне $\mathbf{a}$ на число a , делящо се на k , за което $S(\mathbf{a}) = n$. От наблюдение [2'] следва, че съществува число b , делящо се на k със сума на цифрите (в десетичното си представяне) n . Колкото до низа $\mathbf{a}$ - ще го търсим във вида $\overline{pq}$, където $q = n - p, p = 1, \dots, n$. Понеже стойностите на тези низове са $n + 9p, p = 1, 2, \dots, k, \dots, n$, а те обхождат всички остатъци по модул k заради $(k, 9) = 1$, включително нулевия, търсеното число съществува. ♠

Съществува усилване на горното твърдение:

Задача 2 (M+ ???) Дадено е число k , неделящо се на 3. Ако сумата от цифрите на k е s и $n > s^2 + 7s - 9$ е произволно цяло число, да се докаже, че съществува число N , делящо се на k , със сума на цифрите n .

Решение: При $k < 10$ твърдението следва лесно от предната задача. Нека сега десетичното представяне на k е $\overline{a_t a_{t-1} \dots a_0}$ и $t > 0$. В случай че намерим цели неотрицателни числа p, q , такива че $n = ps + q(s + 9)$, разглеждаме низа $\mathbf{c} = \overline{c_t c_{t-1} \dots c_0}$, такъв че

$$c_i = (p + q)a_i, i = 0, 1, \dots, t - 2, \quad c_{t-1} = (p + q)a_{t-1} + 10q, \quad c_t = (p + q)a_t - q.$$

Явно $c_i \geq 0$, като в случай че $c_t = 0$ можем да изтрием този символ, понеже тогава ще е изпълнено $c_{t-1} > 0$. Да забележим сега, че за стойността c на този символ е изпълнено

$$S(\mathbf{c}) = (p+q)s + 9q = n, \quad c = pk + qk = (p+q)k.$$

От наблюдение $[2']$ задачата следва.

За избора на p и q - понеже $(s, s+9) = 1$ то някое от числата $n - q(s+9), q = 0, 1, \dots, s-1$ се дели на s и е равно на ps за някое цяло p . Понеже $n - q(s+9) > s^2 + 7s - 9 - s^2 - 8s + 9 = -s$, то $p > -1$ и значи $p, q \geq 0$, което и се искаше. ♠

Коментар Тъй като $s^2 + 7s - 8 < 81 \lg^2 k + 63 \lg k$, а последното е на порядък по-малко от k , при достатъчно голямо k втората задача дава по-добър резултат.

Директно приложение на горната техника е следната задача от подготовката на 8-ми А клас:

Задача 3 (В. Колев) Да се докаже, че съществува число A , такова че за $i = 1, 2, \dots, 8$ числото $A + i$ се дели на $2001 + i$ и сумата от цифрите му е $2001 + i$.

Решение: Ще търсим даденото число във вида $A = 10^4 ma + 2001$, където $a = 2002.2003. \dots .2009$. Явно $2001 + i \mid A + i$. Също така - последните четири цифри на $A + i$ са $2, 0, 0, 1 + i$, така че достатъчно е да изискваме $s(10^4 ma) = s(ma) = 1998$. Да забележим, че $a < (10^4)^8 = 10^{32}$, така че $s(a) \leq 9.32 < 1998 < a$; Още - $9/1998, 9/2007/a$ и значи от наблюдение $[1]$ за някое представяне $\mathbf{a}$ на a имаме $S(\mathbf{a}) = 1998$. Сега от наблюдение $[2']$ знаем че има число $b = ma$ за някое естествено m със сума на цифрите точно 1998. С това задачата е решена. ♠