

НЯКОЛКО ЗАДАЧИ РЕШАВАЩИ СЕ С ПОМОЩТА НА ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА

Владимир Барзов

Абстракт

В настоящия списък са събрани олимпийски тип задачи, решаващи се с помощта на вектори, матрици и детерминанти. Някои от формулировките са сменени. Под някои задачи са дадени коментари.

Ползвани твърдения

1. Ако са дадени $n + 1$ на брой n -мерни вектора, то те са линейно зависими.
2. Една детерминанта е 0 тогава и само тогава, когато векторите редове са линейно зависими. Същото важи и за стълбовете.
3. Следното твърдение ще го отделим в лема:

Лема. За всяко нечетно n , ако една матрица $A = (a_{ij})_{n \times n} \in F_{n \times n}$ удовлетворява $a_{ij} + a_{ji} = 0$ за $\forall i, j$ и има нули по главния си диагонал, е изпълнено $\det A = 0$.

Доказателство. Тъй като

$$\det A = \sum a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$$

по всички пермутации $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ на $\{1, 2, \dots, n\}$ без неподвижна точка, то можем да ги групираме по двойки симетрични относно диагонала, така че сумата във всяка двойка да е 0. Действително

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} + a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = (1 + (-1)^n) a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = 0.$$

С това лемата е доказана. □

Коментар. Такава матрица се нарича кососиметрична. При четно n твърдението не винаги е вярно - ако вземем матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ над $R_{n \times n}$, за която $a_{ij} = 1$ при $i > j$, -1 при $i < j$ и 0 при $i = j$, то детерминантата ѝ е сума на толкова на брой числа ± 1 , колкото са пермутациите без неподвижна точка. От теорема на Ойлер за пощальоните се вижда, че те са нечетен брой за всяко четно n и значи $\det A$ е нечетно цяло число, т.е. е различна от 0.

Задача 1 (Всесъюзна олимпиада, 1972). В края на хокеен турнир (в един кръг) се оказало, че които и отбори да вземем, можем да намерим отбор (може би измежду тях), който е събрал нечетен брой точки с тях (0 - загуба, 1 - равен, 2 - победа). Да се докаже, че в турнира участват четен брой отбори.

Решение. Ако отборите са n да построим матрица на инцидентност $A = (a_{ij})_{n \times n}$ над $F = \mathbb{Z}_2$ (остатъци по модул 2), такава че $a_{ij} = 1$ точно при равен мач между отборите i и j (по диагонала има нули). Условието казва, че какъвто и вектор от F^n да вземем можем да го умножим скаларно с някой ред от матрицата и да получим 1. Защо? - булевият вектор представлява групата отбори, а скаларното му произведение с някой ред на матрицата дава броят на точките (по модул 2), които отборът "ред" е събрал играейки с групата отбори от вектора. По условие има такъв, който е събрал нечетен брой точки с тях. Оттук за всеки ненулев вектор $x \in F^n$ имаме ред с номер k , за който

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 1,$$

т.е. векторът Ax е ненулев. Това означава, че $\det A \neq 0$, иначе би имало ненулев вектор x от F^n , за който $Ax = 0$. Остава да докажем, че при нечетно n е изпълнено $\det A = 0$, което пък следва директно от лемата, понеже за A имаме $a_{ij} = a_{ji} = -a_{ij}$. $\square$

Коментар. Пример че за четно n съществува турнир: Всеки мач е завършил наравно. Действително, ако вземем група от четен брой отбори, всеки от тях е направил нечетен брой точки с останалите. Ако групата е от нечетен брой отбори, тогава някой извън нея (отново такъв има) е направил нечетен брой точки от тях.

Задача 2 (Всерусийска олимпиада, 2001). Няколко ученика попълнили тест от n въпроса - някои вярно, други не. Като поставим оценки естествени числа на всеки от въпросите, за всеки ученик можем по верните му отговори да определим колко точки общо има. Ако е известно, че можем да получим всякакво строго класиране подбирайки оценките, то колко са най-много учениците?

Решение. Ако имаме n ученика и i -тият е решил само i -та задача, то явно можем да ги подредим произволно.

Да предположим сега, че учениците са на брой $k > n$. Съпоставяме на всеки ученик вектор $\mathbf{a}_i$ от 0 и 1 с дължина n , такъв че на i -та позиция има 1 точно когато ученикът е решил i -тата задача. Тъй като векторите са повече от размерността си съществуват реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ (не всичките 0), така че

$$\sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}.$$

Явно няма ученик, който не е решил нито една задача, иначе не бихме могли да го класираме пръв ($k > 1$). Тогава ако $\lambda_i > 0$ за някое i , то има j , за което $\lambda_j < 0$. Аналогично обратното.

Подреждаме

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0 \geq \lambda_{m+1} \geq \dots \geq \lambda_k$$

без ограничение. Нека пак без особени притеснения считаме

$$\sum_{i \leq m} \lambda_i \geq \sum_{i > m} (-\lambda_i).$$

Тогава вземаме такива оценки $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, за които класирането по точки е $A_1 > A_2 > \dots > A_k$ - според условието можем да го направим. От една страна $\mathbf{p} \sum_i (\lambda_i \mathbf{a}_i) = 0$, но от друга - този израз е:

$$\begin{aligned} \sum_i (\lambda_i \mathbf{p} \mathbf{a}_i) &= \sum_i (\lambda_i A_i) \geq \sum_{i \leq m} (\lambda_i A_m) + \sum_{i > m} (\lambda_i A_{m+1}) \\ &\geq \sum_{i \leq m} (\lambda_i A_m) - \sum_{i \leq m} (\lambda_i A_{m+1}) = (A_m - A_{m+1}) \sum_{i \leq m} \lambda_i > 0, \end{aligned}$$

което е противоречие. Окончателно - учениците са най-много n . $\square$

Задача 3 (Монголска Олимпиада, 2001). Да се намери броят на таблиците $2n \times 2n$ със свойството: част от квадратчетата са маркирани, така че всяко квадратче има четен брой съседни (по страна) маркирани.

Решение. С нули ще отбелязваме празните квадратчета, а с единици - маркираните. Разглеждаме редовете като n -мерни вектори над $F = \mathbb{Z}_2$ - съответно $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{2n}$. Ако дефинираме нулев ред, запълнен само с нули ($\mathbf{a}_0 = 0$), то условието на задачата се изразява чрез рекурентната зависимост

$$\mathbf{a}_{k+1} = \mathbf{a}_{k-1} + B\mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n-1,$$

където B е матрицата $(b_{ij})_{2n \times 2n}$, такава че $b_{ij} = 1$ точно при $|i - j| = 1$. Така условието всяко квадратче да има четен брой съседи е изпълнено за редовете $1, 2, \dots, 2n-1$, получени еднозначно от рекурентната зависимост. Защо тя е точно такава - за да бъдат числата от ред k заградени с четен брой единици, трябва в F да е изпълнено именно

$$\mathbf{a}_{k+1} + \mathbf{a}_{k-1} + B\mathbf{a}_k = 0,$$

т.е. горната връзка. Остава да проверим, дали всеки първи ред генерира таблица, удовлетворяваща и последния $2n$ -ти ред. За целта ще покажем, че матрицата C , такава че $\mathbf{a}_{2n} = C\mathbf{a}_1$, е с единици по вторичния диагонал и значи $\mathbf{a}_{2n}$ е централно симетричен на $\mathbf{a}_1$ (матрицата C се получава от рекурентната връзка). Последното е достатъчно да е изпълнено само за единичните вектори, а там нещата са ясни - проверява се на картинка. Окончателно всеки първи ред поражда единствена такава таблица и търсеният брой е 2^{2n} . $\square$

Задача 4 (Беларуска олимпиада, 1999). Съществува ли в n -мерното пространство (n е нечетно) изображение f , така че за всеки две различни точки A и B отсечката AB е перпендикулярна на отсечката $f(A)f(B)$?

Решение. Ако t е трансляция, а f удовлетворява условието на задачата, то явно tf също изпълнява условието на задачата. Затова ще считаме, че f има неподвижна точка O . Вместо $f(X) = Y$ за точки X, Y ще пишем $f(x) = y$, където x, y са векторите $\overrightarrow{OX}$ и $\overrightarrow{OY}$. Нулевият вектор $\overrightarrow{OO}$ ще бележим с 0 . Да забележим, че условието на задачата е еквивалентно с:

(i) за всеки два вектора x, y е изпълнено

$$(x - y)(f(x) - f(y)) = 0$$

(понеже $XY \perp f(X)f(Y)$);

(ii) f е инекция, понеже праща различните точки в различни; в частност $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$.

Полагаме $y = 0$ в (i) и получаваме $xf(x) = 0$ за $\forall x$. Оттам пак в (i) имаме

$$xf(y) + yf(x) = 0. \quad (*)$$

Нека a, b са произволни вектори, чиято сума замества като y в (*). Тогава

$$xf(a+b) = (a+b)f(x) = af(x) + bf(x) = xf(a) + xf(b)$$

$$\Rightarrow x(f(a+b) - f(a) - f(b)) = 0.$$

Полагайки $x = f(a+b) - f(a) - f(b)$ стигаме до извода

$$(f(a+b) - f(a) - f(b))^2 = 0 \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b). \quad (1)$$

Отново - нека a е произволен вектор, а $\lambda \in R$. Полагаме в (*) $y = \lambda a$. Последователно имаме:

$$xf(\lambda a) = \lambda af(x) = \lambda xf(a) \Rightarrow x(f(\lambda a) - \lambda f(a)) = 0.$$

Ако $x = f(\lambda a) - \lambda f(a)$, то

$$(f(\lambda a) - \lambda f(a))^2 = 0 \Rightarrow f(\lambda a) = \lambda f(a). \quad (2)$$

От наблюдения (1) и (2) следва, че f е линеен оператор $\Rightarrow f(x) = Ax$ за всеки вектор x , където A е матрица $n \times n$ - матрицата на оператора в базиса от единичните вектори e_i . От (i) имаме $e_i(Ae_i) = 0$, което означава, че по главния си диагонал A има само 0. Ако $A = (a_{ij})$, то от

$$(e_i + e_j)A(e_i + e_j) = 0$$

следва, че $a_{ij} = -a_{ji}$ за всеки i, j . Действително, понеже i -тия ред на $A(e_i + e_j)$ е съответно a_{ij} , а j -тия е a_{ji} , то

$$0 = (e_i + e_j)A(e_i + e_j) = a_{ij} + a_{ji}.$$

Така A е кососиметрична, и според лемата при нечетно n е изпълнено $\det A = 0$. Тогава $\exists x \neq 0$:

$$Ax = 0 = A0,$$

т.е. $f(x) = f(0)$, което е противоречие с инективността на f . □

Коментар. При четно n следната матрица върши работа:

$$A = (a_{ij}) : \quad a_{12} = a_{34} = \dots = 1, \quad a_{21} = a_{43} = \dots = -1,$$

останалите a_{ij} са 0. Лесно се вижда, че тя изпълнява (i) и (ii). Тогава f представлява просто ротация на 90 градуса по равнините на първата двойка компоненти, втората двойка компоненти и т.н. Задачата е най-смислена за равнината и пространството (както междувпрочем гласи и оригиналната формулировка).

Задача 5 (Румънска олимпиада, 1990). На събрание участвали n човека, всеки от които познава точно k от присъстващите. Ако всеки двама познати имат точно l общи познати, а всеки двама непознати имат точно m общи познати, да се докаже равенството

$$m(n - k) - k(k - l) + k - m = 0.$$

Решение. Нека векторите на познанствата са $a_1, a_2, \dots, a_n$ (никой не познава себе си). От една страна изразът

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = nk^2,$$

защото изразът в скобите е векторът $(k, k, \dots, k)$. Но ако го разпишем ще получим

$$nk^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 + 2Ll + 2Mm,$$

където L е броят на двойките познати, а M на двойките непознати. Действително, ако p, q са познати, то $pq = l$, а в противен случай $pq = m$. Но $2L = nk$, понеже всеки има k познати, а $2M = n(n - 1) - 2L$. Тогава

$$nk^2 = nk + nkl + m(n(n - 1) - nk),$$

$$k^2 - k = kl + m(n - 1) - mk,$$

$$m(n - k) - k(k - l) + k - m = 0.$$

□

Коментар. Задачата може да се реши и като се преброят всички тройки от хора и броят на познанствата във всяка от тях.

Задача 6 (Републиканска олимпиада, 2000). Нека A е множеството от всички редици от нули и единици с дължина n и $0 \in A$ е редицата от нулеви членове. Под сума на две редици $a = a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b = b_1, b_2, \dots, b_n$ разбираме редицата $c = c_1, c_2, \dots, c_n$, за която $c_i = 0$ ако $a_i = b_i$, и $c_i = 1$ ако $a_i \neq b_i$. Нека $f : A \rightarrow A$ е функция за която $f(0) = 0$ и ако редиците a и b се различават точно в k члена, то редиците $f(a)$ и $f(b)$ се различават също в k члена. Да се докаже, че ако a, b , и c са редици от A , за които $a + b + c = 0$, то $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Решение. Ще разглеждаме редиците като n -мерни вектори над полето $F = \mathbb{Z}_2$. Нека ab да означава броя на общите единици на a и b . Тогава x^2 представлява броят на единиците в x . Ще отбележим, че a и b се отличават в толкова позиции, колкото единици има $a + b$, откъдето

$$(a + b)^2 = (f(a) + f(b))^2;$$

в частност при $a = 0$ имаме $a^2 = f(a)^2$. Броят на различните позиции на a и b е колкото са позициите където a има 1, а b има 0 (общо $a^2 - ab$) плюс позициите където a има 0, а b съответно 1 (общо $b^2 - ab$). Тогава

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Следователно

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a + b)^2 = (f(a) + f(b))^2 = f(a)^2 + f(b)^2 - 2f(a)f(b),$$

откъдето заради $a^2 = f(a)^2$ и $b^2 = f(b)^2$ получаваме

$$ab = f(a)f(b). \quad (*)$$

Нека сега e_i са единичните вектори. От

$$f(e_i)f(e_j) = e_i e_j = 1 \text{ при } i = j \text{ и } 0 \text{ при } i \neq j$$

следва, че $f(e_i)$ са също единични и притова два по два различни вектора, т.е. образуват пермутация на $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Тогава $\exists A$ - матрица над F , такава че $f(e_i) = Ae_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$.

Нека сега a е произволен вектор и

$$f(a) = \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \dots + \lambda_n f(e_n), \quad a = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \dots + \mu_n e_n,$$

където $\lambda_i, \mu_i \in F$. Тогава от (*)

$$\lambda_i = f(e_i)f(a) = e_i a = \mu_i \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, n,$$

следователно $f(a) = Aa$. Оттук при $a + b + c = 0$ имаме

$$f(a) + f(b) + f(c) = Aa + Ab + Ac = A(a + b + c) = A0 = 0$$

и е готово. □

Коментар. Всяка матрица пермутираща единичните вектори върши работа, откъдето броят на функциите от горния вид е точно $n!$.

Задача 7 (собствена, 2001). Околната повърхнина на цилиндър с обиколка p - просто > 2 - и височина k - естествено число е разграфена на единични квадратчета, във всяко от които е записано реално число. За всяко квадратче сумата от числата, записани в съседните му квадратчета, е 0 и притова поне едно от всичките числа не е 0. Да се докаже, че $k \geq p - 1$.

Решение. Да изберем една колонка и да считаме редовете като p -мерни вектори с първа координата в колонката. Да номерираме векторите $a_1, a_2, \dots, a_k$ и да добавим изкуствено $a_0 = 0$. Нека $A = (u_{ij})_{p \times p}$: $u_{ij} = 1$ при $i = j - 1$ и при $\{i, j\} = \{1, n\}$ и $u_{ij} = 0$ в останалите случаи; иначе казано - A е с единици по 2-рия обобщен диагонал. Проверява се, че A^m е матрица с единици по $m + 1$ -тия обобщен диагонал. Тогава $A^p = E$ (единична матрица), т.е. $A^{p-1} = A^{-1}$.

Да забележим, че векторите a_i изпълняват

$$a_{i-1} + a_{i+1} = (A + A^{-1})a_i \quad \text{за } i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Тогава

$$a_{i+1} - Aa_i = A^{-1}(a_i - Aa_{i-1}).$$

Явно $a_1 \neq 0$, иначе бихме имали $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, което противоречи на условието. Ако вземем вектор a_{k+1} , получен от същата рекурентна формула, той трябва да е точно 0 - това е условието всяка съседна клетка на най-долния ред да е обкръжена от числа със сума 0. Имаме

$$a_{i+1} - Aa_i = A^{-1}(a_i - Aa_{i-1}) = A^{-i}a_1.$$

Оттук по индукция

$$a_i = (A^{i-1} + A^{i-3} + \dots + A^{-i+3} + A^{-i+1})a_1.$$

Следователно ако

$$B = (A^k + A^{k-2} + \dots + A^{-k+2} + A^{-k}),$$

то от $a_{k+1} = 0$ следва $Ba_1 = 0$. Но от $0 = A(Ba_1) = (AB)a_1$ следва $(AB + B)a_1 = 0$. Последното е равно на

$$(A^{k+1} + A^k + \dots + A^{-k+1} + A^{-k})a_1,$$

т.е.

$$A^{-k}(A^0 + A^1 + \dots + A^{2k+1})a_1 = 0,$$

значи

$$(A^0 + A^1 + \dots + A^{2k+1})a_1 = Ta_1 = 0.$$

Ако предположим $k < p - 1$ имаме $(2(k+1), p) = 1$ и значи има такива естествени m и r , за което $m(2k+2) - rp = 1$. Имаме

$$0 = (E + A^{2k+2} + \dots + A^{(m-1)(2k+2)})Ta_1 = rpDa_1 + Ea_1 = 0,$$

където D е матрица само с единици. Нека $a_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Тогава

$$rp(x_1 + x_2 + \dots + x_p) + x_i = 0$$

и следователно $x_1 = x_2 = \dots = x_p = x$, откъдето $(rp^2 + 1)x = 0$. Окончателно $x = 0 \Rightarrow a_1 = 0$, което е противоречие. Следователно $k \geq p - 1$. $\square$

Задача 8 (собствена, 2001). Около маса са седнали $2^n + 1$ човека, всеки от които се погажда единствено със съседите си. През 15 минути всеки двама, които са имали нечетен брой общи приятели си променят отношенията - или се скарват, или се сдобряват. Да се покаже, че след известно време всички ще са скарани.

Решение. Нека $m = 2^n + 1$ а $B = (b_{ij})_{m \times m}$ над F_2 е матрица, такава че $b_{ij} = 1$ ако $|i - j| = 1$ и $b_{ij} = 0$ в противен случай. Тогава матрицата, описваща приятелските отношения на масата е

$$A = B + B^{-1}.$$

Ще покажем, че редицата матрици, изразяващи приятелствата е

$$A_{k+1} = A_k^2 + A_k, \quad A_0 = A.$$

Числата по диагоналите им са еднакви за всяка матрица - ще докажем и двете твърдения по индукция.

Нека в даден момент векторите на i и j -ти човек ($i \neq j$) са $p = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ и $q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$. Имаме $q_j = p_i$ от индукцията и също така $q_i = p_j$, понеже отношенията на i и j са взаимни. Тогава $p_i q_i + p_j q_j \sim 0$ и значи скалярът pq представлява точно броят на общите познати на i и j . Но в матрицата A_k i -тият ред и стълб са еднакви, т.е. pq стои на ij -то и на ji -то места в матрицата A_k^2 . Освен това $p^2 = q^2$, понеже броят на познатите на i и j е еднакъв поради симетрия. Тогава числата по диагонала на A_k^2 са еднакви. Събирайки с A_k ще получим матрицата A_{k+1} също с равни числа по диагонала и притова изразяваща следващата ситуация условието - при $pq = 1$ i -тия и j -тия си сменят отношенията. По индукция се показва, че

$$A_k \sim \sum_{i=0}^k C_k^i A^{2^i}.$$

Т.е.

$$A_{2^n} \sim A^{2^n} + A \sim B^{2^n} + B^{-2^n} + B + B^{-1} \sim B^{-1} + B + B + B^{-1} \sim 0,$$

което и се искаше. □

Задача 9 (неизвестен източник, 2001). Всяка от m -те комисии поставя на всеки от n -те състезателя оценка 2, 3 или 4. За всяка двойка състезатели ще се намери единствена комисия, която на единия от двамата е поставила 2, а на другия 4. Да се докаже, че $m \geq n - 1$.

Решение. Нека номерираме състезателите и комисии и на i -тия състезател да поставим булеви $m + 1$ -мерни вектори a_i и b_i , отговарящи съответно на тези комисии, от които състезателят е получил 2 и 4, като накрая прибавим $m + 1$ -ва компонента "1" за всеки вектор a_i и "0" за всеки вектор b_i . Тогава $a_i b_i = 0$, понеже от никоя комисия състезател не може да получи и 2 и 4. Но при $i \neq j$ имаме

$$a_i b_j + a_j b_i = 1,$$

понеже има точно една комисия, където състезатели i и j са получили или 2, 4 или 4, 2.

Ако предположим, че $m + 1 < n$, то $\exists$ ненулева n -торка $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0.$$

Да умножим отляво и отдясно с $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$ - имаме

$$\sum_{i < j} (\lambda_i \lambda_j a_i b_j + \lambda_j \lambda_i a_j b_i) + \sum_i \lambda_i^2 a_i b_i = 0,$$

значи

$$\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = 0.$$

Имаме и че

$$0 = \sum_i \lambda_i = \left(\sum_i \lambda_i \right)^2$$

(защото последните компоненти на a_i са “1”-ци). Тогава

$$0 = \left(\sum_i \lambda_i \right)^2 - 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j = \sum_i \lambda_i^2 > 0,$$

което е противоречие с допускането $m + 1 < n$. □

Коментар. Пример, че $n - 1$ комисии стигат е следният: i -тата комисия ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) поставя 3 на състезатели $1, 2, \dots, i - 1$; 2 на състезател i ; 4 на състезатели $i + 1, \dots, n$.