

Владимир В. Барзов

Задача Да се докаже, че

а) не съществува функция $f : R_+ \times R_+ \rightarrow R$,

б) съществува функция $f : Q_+ \times Q_+ \rightarrow Q$,

такава че за всеки три числа $a < b < c$ от дефиниционната ѝ област да е изпълнено

$$f(a, c) < f(a, b) < f(b, c).$$

Доказателство а) Да предположим, че такава съществува. За всяко реално число x при $a = x, b = 2x, c = 3x$ се вижда, че $f(x, 3x) < f(x, 2x)$. От интервала $(f(x, 3x), f(x, 2x))$ избираме произволно рационално число и го съпоставяме на x .

Да забележим, че тези интервали не се пресичат - за целта ще покажем, че от $x < y$ следва $f(x, 2x) < f(y, 3y)$. Възможни са два случая:

1. $y \geq 2x$ - тогава $f(x, 2x) < f(2x, 3y) \leq f(y, 3y)$;

2. $y < 2x$ - имаме $f(x, 2x) < f(x, y) < f(y, 3y)$.

Следва, че рационалните числа, които съпоставихме на всяко реално положително число са различни. Но както е добре известно, инекция от R_+ в Q не съществува. Следователно и функция с исканите свойства не съществува.

б) Полагаме $f(a, x) = 1983$ при $x \leq a$. При $x > a$ ще дефинираме $f(a, x)$ върху интервала $\Delta(a)$, така че функцията $F_a(x) = f(a, x)$ да е намаляваща при $x > a$. Това правим по следния начин: избираме две рационални числа l_a и r_a от $\Delta(a)$, $l_a < r_a$, и дефинираме

$$F_a(x) = l_a + \frac{r_a - l_a}{x + 1}.$$

Горното изображение ще наричаме проекция на $f(a, x)$ върху $\Delta(a)$.

Сега ще конструираме гъсто множество от интервали в R , т.е. такова множество, че които и два интервала от него да изберем, можем да намерим между тях интервал от същото множество. Нека разгледаме множеството C от всички подинтервали (l, r) на $(0, 1)$, такива че

$$l = (0, p_1 p_2 \dots p_{n-1} 1)_3, \quad r = (0, p_1 p_2 \dots p_{n-1} 2)_3,$$

където цифрите $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ в троичните записи на l и r са 0 или 2. Ще покажем, че между всеки два интервала има трети от същото множество, в частност интервалите не се пресичат.

Да вземем два интервала (l_1, r_1) и (l_2, r_2) и нека $r_1 < r_2$. Тогава троичните им записи се различават в някоя цифра (в полза на r_2) и то не последната. Ако r_2 се записва с n символа, то

$$r_2 - r_1 > \frac{2}{3^{n-1}} - \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}} - \dots = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Нека

$$r_3 = r_2 - \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}, \quad l_3 = r_2 - \frac{2}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Лесно се съобразява, че (l_3, r_3) е от C . Притога

$$r_2 > l_2 = r_2 - \frac{1}{3^n} > r_3 > l_3 > r_2 - \frac{1}{3^{n-1}} > r_1 > l_1.$$

Освен това вляво и вдясно от всеки интервал се намира някоя двойка интервали

$$\left(\frac{1}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right), \quad \left(1 - \frac{2}{3^n}, 1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Нека сега подредим рационалните числа в редица: $q_1, q_2, \dots$. Вземаме q_1 и избираме произволно интервала $\Delta(q_1)$ от C . След това вземаме q_2 и в зависимост дали $q_2 < q_1$ или не избираме от C интервала $\Delta(q_2)$ вляво или вдясно от $\Delta(q_1)$. Аналогично процедираме с $q_3, q_4, \dots$ - определяме за всяко m между кои две числа от $q_1, q_2, \dots, q_{m-1}$ се намира q_m и избираме интервал $\Delta(q_m)$ от C между техните, който и съпоставяме на q_m . Накрая остава да проектираме по гореописания начин $f(q, x)$ върху $\Delta(q)$ за всяко рационално положително число q .

Така конструираната функция удовлетворява условието на задачата - трябва да го проверим единствено за $f(x, y)$ при $x < y$. Първото неравенство следва от начина по който проектираме $f(a, x)$ върху $\Delta(a)$. Второто неравенство следва от $a < b$ и начина по който избираме интервалите $\Delta(q)$ от C . С това съществуването на функцията е доказано.