

Някои приложения на корените на единицата
Владимир Барзов, ученик XI клас, СМГ

Целта на настоящата статия е да илюстрира използването на корените на единицата за решаване на задачи от различни математически области – комбинаторика, алгебра, теория на числата и др. Подбраните примери са главно от национални и международни олимпиади по математика.

Както е добре известно – за всяко естествено число n уравнението $x^n - 1 = 0$ има n различни комплексни корена $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$, където $\varepsilon_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Комплексните числа ε_n имат модул 1 и ако положим $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$, то от формулата на

Моавър следва, че $\varepsilon_j = \varepsilon^j$. Освен това $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ за цели числа k и l тогава и само тогава, когато $k \equiv l \pmod{n}$. Следващото свойство на корените на единицата се използва често и затова ще го отделим като

Лема.
$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^k = \begin{cases} n & \text{при } k \equiv 0 \pmod{n} \\ 0 & \text{при } k \not\equiv 0 \pmod{n} \end{cases} \quad (*)$$

Доказателство:
$$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} (\varepsilon^k)^j = \begin{cases} \frac{\varepsilon^{kn} - 1}{\varepsilon^k - 1} = \frac{1 - 1}{\varepsilon^k - 1} = 0 & \text{при } \varepsilon^k \neq 1 = \varepsilon^0 \\ 1 + 1 + \dots + 1 = n & \text{при } \varepsilon^k = 1 = \varepsilon^0 \end{cases}$$

Да отбележим, че корените на единицата могат да се представят геометрично като върхове на правилен n -ъгълник вписан в единичната окръжност.

Ще започнем с две задачи, в които се използва именно тази геометричната интерпретация.

Задача 1. (Всеизюзна олимпиада 1970) Върховете на правилен n -ъгълник са оцветени в няколко цвята (всеки връх в един цвят) така, че точките от един и същи цвят са върхове на правилени многоъгълници. Да се докаже, че измежду тези многоъгълници има два еднакви.

Решение: Без ограничение можем да разглеждаме върховете на n -ъгълника като n -ти корени на единицата. Да предположим, че някои два едноцветни многоъгълника не са еднакви и нека те имат съответно $d_1 < d_2 < \dots < d_m$ върха. Да сумираме d_1 -тите степени на "върховете" на тези многоъгълници. От $n > d_1$ следва, че n не дели d_1 и от (*) заключаваме, че тази сума е 0. Но ако изчислим същата тази сума поотделно за всеки от едноцветните многоъгълници, то от $d_i > d_1$ за $i = 2, 3, \dots, m$ и d_1/d_1 предвид (*) тя е (за някое k) $\varepsilon^{kd_1} + 0 + \dots + 0 = \varepsilon^{kd_1} \neq 0$. Полученото противоречие доказва твърдението на задачата.

Задача 2. (USAMO) По единичната окръжност са избрани точките $A_1, A_2, \dots, A_n$. Да се покаже, че ако за всяка точка M върху окръжността е изпълнено $|MA_1| |MA_2| \dots |MA_n| \leq 2$ то $A_1, A_2, \dots, A_n$ са върхове на правилен n -ъгълник.

Решение: Да разгледаме полинома $f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$, където a_j е афикс на точката A_j .

Нека $a = (-1)^n (a_1 a_2 \dots a_n)^{-1}$, $\tau = a^{\frac{1}{n}}$, $|a| = |\tau| = 1$. Полагаме

$$g(z) = af\left(\frac{z}{\tau}\right) = z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \dots + A_1z + 1$$

ако предположим $|f(z)| \leq 2$ за всяко $z: |z| = 1$, то и $|g(z)| \leq 2$ за всяко $z: |z| = 1$. Тогава получаваме

$$2n = \left| \sum_{j=0}^{n-1} g(\varepsilon_j) \right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |g(\varepsilon_j)| \leq 2n. \text{ Последното е възможно само при } g(\varepsilon_j) = 2 \text{ за}$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$. Това означава, че $g(z) - 2 \equiv z^n - 1$ и следователно уравнението $f(z) = 0$ има

за корени числата $\frac{1}{\tau} \left(\cos \frac{(2j-1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2j-1)\pi}{n} \right)$ за $j = 1, 2, \dots, n$, които са върхове на правилен многоъгълник.

Задача 3. (МОМ'95 Канада) За дадено просто $p > 2$ да се определи броят на p -елементните подмножества на множеството $\{1, 2, \dots, 2p\}$ такива, че сумата на елементите им се дели на p .

Решение: Да разгледаме полинома $f(x, y) = (1+yx)(1+yx^2)(1+yx^3) \dots (1+yx^{2p})$. Той може да се представи във вида $f(x, y) = q_0(x) + q_1(x)y + \dots + q_{2p}(x)y^{2p}$, където $q_k(x) = \sum x^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}$, като съответните суми са взети по всички k -елементни подмножества на $\{1, 2, \dots, 2p\}$. Ако сега полижим

$q_p(x) = A_0 + A_1x + \dots = (A_0 + A_px^p + \dots) + (A_1x + A_{p+1}x^{p+1} + \dots)$, то търсеният в задачата брой на p -елементните множества на $\{1, 2, \dots, 2p\}$ е точно сумата $A_0 + A_p + A_{2p} + \dots = A$

От (*) имаме $\sum_{j=0}^{p-1} f(x, \varepsilon_j) = p(q_0(x) + q_p(x) + q_{2p}(x)) = p(1 + x^{p(2p+1)}) + pq_p(x)$ Но

$$\sum_{j=0}^{p-1} q_p(\varepsilon_j) = p(A_0 + A_p + \dots) = pA \Rightarrow \sum_{j,k=0}^{p-1} f(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = p(p + p) + p^2A = p^2(A + 2). \text{ Остава да}$$

изчислим последната сума:

$$\sum_{j,k=0}^{p-1} f(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \sum_{k=0}^n f(1, \varepsilon_k) + \sum_{j=1, k=0}^{p-1} f(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \sum_{j=0}^{p-1} (1 + \varepsilon_j)^{2p} + p(p-1) \prod_{j=0}^{p-1} (1 + \varepsilon_j)^2. \text{ Знаем,}$$

че $g(x) = x^p - 1 = \prod_{j=0}^{p-1} (x - \varepsilon_j)$ и следователно $4 = g^2(-1) = \prod_{j=0}^{p-1} (1 + \varepsilon_j)^2$, а според (*) имаме

$$\sum_{j=0}^{p-1} (1 + \varepsilon_j)^{2p} = p \binom{2p}{0} + p \binom{2p}{p} + p \binom{2p}{2p} = p \left(2 + \binom{2p}{p} \right) \Rightarrow p^2(A + 2) = 4p^2 - 2p + p \binom{2p}{p} \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \frac{\binom{2p}{p} - 2}{p} + 2$$

Задача 4. (Своя) В таблица (a_{kp}) с размери 6×21 са записани общо 18 нули, 18 единици, ..., 18 шестици. За произволни $k, l \in [1;6]$ и $p, q \in [1;21]$ е изпълнено $a_{kp} - a_{lp} \equiv a_{kq} - a_{lq} \pmod{7}$. Да се покаже, че във всеки ред има по 3 нули, 3 единици, ..., 3 шестици.

Решение: Да построим нова таблица (b_{kp}) , като $b_{kp} = \varepsilon^{a_{kp}}$, където $\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.

Нека сумата от числата в k -тия ред е s_k , $k = 1, 2, \dots, 6$. От условието имаме, че $s_k = s_l \varepsilon^{m_k}$ за някои цели m_k , които без ограничение ще считаме цели числа в интервала $[0;6]$. Нека

$q(x) = 1 + x + \dots + x^6$. Тогава имаме $s_l(\varepsilon^{m_1} + \varepsilon^{m_2} + \dots + \varepsilon^{m_6}) = \sum_{i=1}^6 s_i = 18q(\varepsilon) = 0$. Нека

$p(x) = x^{m_1} + x^{m_2} + \dots + x^{m_6}$ и $s(x) = \sum_{i=1}^6 x^{a_{i1}} \rightarrow s(\varepsilon) = s_1$. Тогава $s(\varepsilon)p(\varepsilon) = 0$, т.е. ε е корен на

$s(x)$ или на $p(x)$. Сега ще използваме добре известния факт, че полиномът $q(x)$ е неразложим (по-общо – за всяко просто q полиномът $1 + x + \dots + x^{q-1}$ е неразложим).

Ако предположим, че $p(\varepsilon) = q(\varepsilon) = 0$, то от неразложимостта на $q(x)$ следва че $q(x)$ дели $p(x)$.

От $\deg(p) \leq 6 = \deg(q)$ следва, че $p(x) = kq(x)$ за някое цяло k . Но тогава $7k = q(1)k = p(1) = 6$, което е невъзможно. Следователно $s(\varepsilon) = q(\varepsilon) = 0$. С аналогични разсъждения стигаме до извода, че $s(x) = kq(x)$. Оттук $21 = s(1) = kq(1) = 7k$, т.е. $k = 3$ и значи

$s(x) = 3 + 3x + \dots + 3x^6$. Това показва, че в първия ред на (a_{kp}) има 3 нули, 3 единици, ..., 3 шестици. По същия начин твърдението следва и за останалите редове, с което задачата е решена.

Задача 5. (Ленинградска олимпиада 1991) Една редица $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ се нарича p -балансирана, ако всички суми от вида $a_k + a_{k+p} + a_{k+2p} + \dots$ за $k = 0, 1, \dots, p-1$ са равни помежду си. Да се докаже, че ако една редица с 50 члена е p -балансирана за $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то всичките и членове са равни на 0.

Решение: Нека дадената редица е $a_0, a_1, \dots, a_{49}$. Образоваме полинома $p(x) = \sum_{i=0}^{49} a_i x^i$. Полагаме

$\varepsilon = \cos\left(\frac{2\pi}{13}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{13}\right)$. За $k = 1, 2, \dots, 12$ имаме

$p(\varepsilon^k) = (a_0 + a_p + \dots) + (a_1 + a_{p+1} + \dots)\varepsilon^k + (a_2 + a_{p+2} + \dots)\varepsilon^{2k} + \dots =$

$(a_0 + a_p + \dots)(\varepsilon^k + \varepsilon^{2k} + \dots + \varepsilon^{12k})$ и от (*) следва, че $p(\varepsilon^k) = 0$. Като разсъждаваме по

аналогичен начин за останалите прости числа 3, 5, 7, 11, 17 виждаме, че $p(x)$ има 50 различни корена (корените са различни, защото

$\cos\left(\frac{2\pi k_1}{p_1}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k_1}{p_1}\right) \neq \cos\left(\frac{2\pi k_2}{p_2}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k_2}{p_2}\right)$ при различни прости p_1 и p_2 , ако $1 \leq k_1 \leq$

$p_1 - 1$ и

$1 \leq k_2 \leq p_2 - 1$). Тъй като $p(x)$ е полином от 49 степен, то $p(x) \equiv 0$, т.е. $a_0 = a_1 = \dots = a_{49} = 0$.

Задача 6. (предложение за МОМ'99) Нека $p > 5$ е просто число. Означаваме с $E(0,1,2)$ броя на всички суми от вида $x_1 + 2x_2 + (p-1)x_{p-1}$, които се делят на p и $x_j \in \{0,1,2\}$. Аналогично определяме числото $E(0,1,3)$. Да се докаже, че $E(0,1,2) < E(0,1,3)$.

Решение: Да разгледаме полинома

$$f(x) = (1+x+x^2)(1+x^2+x^4)\dots(1+x^{p-1}+x^{2p-2}) = \frac{(x^3-1)(x^6-1)\dots(x^{3p-3}-1)}{(x-1)(x^2-1)\dots(x^{p-1}-1)}.$$

Както в предната

задача полагаме $\varepsilon_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{p}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{p}\right)$, $j = 0, 1, \dots, p-1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$. От (*) следва, че

$$pE(0,1,2) = \sum_{j=0}^{p-1} f(\varepsilon_j).$$

Да забележим, че числата $\{\varepsilon_0^3, \varepsilon_1^3, \dots, \varepsilon_{p-1}^3\}$ са пермутация на

$\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p-1}\}$. Тогава за $j = 1, 2, \dots, p-1$ имаме:

$$f(\varepsilon_j) = \frac{(\varepsilon_j^3-1)(\varepsilon_j^6-1)\dots(\varepsilon_j^{3p-3}-1)}{(\varepsilon_j-1)(\varepsilon_j^2-1)\dots(\varepsilon_j^{p-1}-1)} = \frac{(\varepsilon_j-1)(\varepsilon_j^2-1)\dots(\varepsilon_j^{p-1}-1)}{(\varepsilon_j-1)(\varepsilon_j^2-1)\dots(\varepsilon_j^{p-1}-1)} = 1 \text{ и значи}$$

$$pE(0,1,2) = 3^p + p - 1$$

Аналогично разсъждаваме за полинома $g(x) = (1+x+x^3)(1+x^2+x^6)\dots(1+x^{p-1}+x^{3p-3})$. Отново

$$pE(0,1,3) = \sum_{j=0}^{p-1} g(\varepsilon_j) = g(1) + \sum_{j=1}^{p-1} g(\varepsilon_j) = 3^p + (p-1)g(\varepsilon),$$

поради $g(\varepsilon) = g(\varepsilon_1) = g(\varepsilon_2) = \dots = g(\varepsilon_{p-1})$.

Остава да покажем, че $g(\varepsilon) > f(\varepsilon) = 1$. Имаме

$$g(\varepsilon) = \prod_{j=1}^{p-1} (1 + \varepsilon^j + \varepsilon^{3j}) = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (1 + \varepsilon^j + \varepsilon^{3j}) \left(\overline{1 + \varepsilon^j + \varepsilon^{3j}} \right) =$$

$$\prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(3 + (\varepsilon^j + \overline{\varepsilon^j}) + (\varepsilon^{2j} + \overline{\varepsilon^{2j}}) + (\varepsilon^{3j} + \overline{\varepsilon^{3j}}) \right) = \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(3 + 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{p}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi j}{p}\right) + 2 \cos\left(\frac{6\pi j}{p}\right) \right)$$

Да разгледаме полинома $c(x) = 3 + 2x + 2(2x^2 - 1) + 2(4x^3 - 3x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x + 1$ за $x \in (-1; 1)$

По-подробни изследвания показват, че

$$(1) \quad c(x) > 1, x \in (-1; 0) \rightarrow c(\cos(a)) > 1, a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$(2) \quad c(x) \geq \frac{47 - 14\sqrt{7}}{27} > \frac{1}{3}, x \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow c(\cos(a)) > \frac{1}{3}, a \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(3) \quad c(x) \geq 1, x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \rightarrow c(\cos(a)) \geq 1, a \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$(4) \quad c(x) \geq 3, x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right] \rightarrow c(\cos(a)) \geq 3, a \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \text{ (Фиг.1)}$$

Условно да наречем разгледаните по горе интервали за α съответно първи, втори, трети и

четвърти. Както видяхме по-горе, $g(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} c\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{p}\right)\right)$ е произведение на положителни

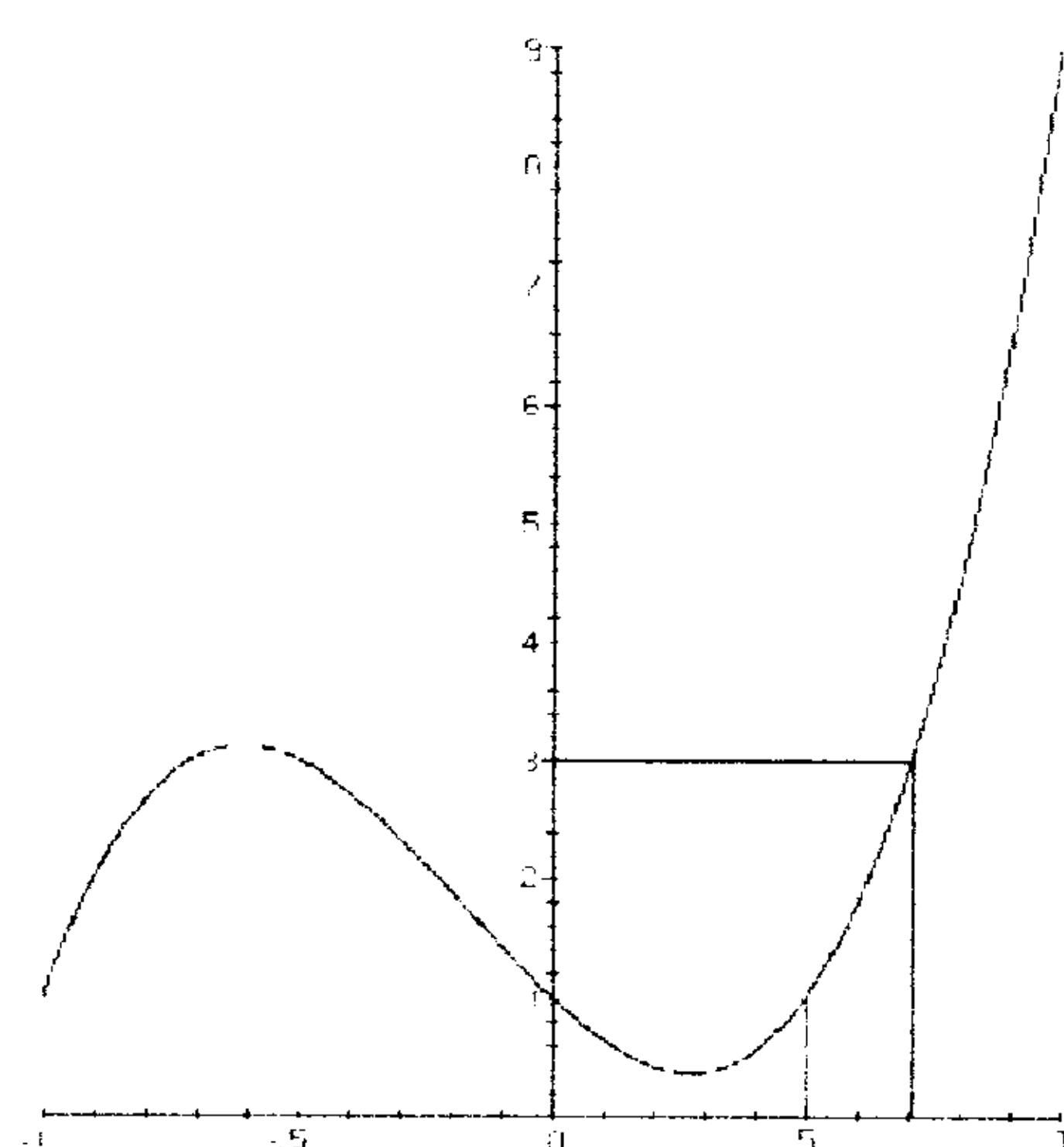
числа, част от тях са >1 - тези j , за които $\frac{2\pi j}{p}$ е от първи или трети интервал, друга част са $>\frac{1}{3}$

- тези j , за които $\frac{2\pi j}{p}$ е от втори интервал и трета част са >3 - тези j , за които $\frac{2\pi j}{p}$ е от четвърти

интервал. Понеже измежду $c\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{p}\right)\right)$, $j = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ в първи интервал попадат

$\frac{p-1}{2} - \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor > \frac{p-2}{4} > 1$, то достатъчно е да покажем, че броят на тези измежду горните във

втори интервал не надминава броя на тези в четвърти. Последните две наблюдения доказват



строгото неравенство $g(\varepsilon) > 1 = f(\varepsilon)$, откъдето задачата следва. Остава да преброим числата във втори и четвърти интервал - съответно

$\left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor$ и $\left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor$. Трябва да покажем, че за всяко

просто $p > 5$ е изпълнено неравенството

$\left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor$. За $p = 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$,

31 то се проверява директно. За $p \geq 35$ имаме

$\left\lfloor \frac{p}{8} \right\rfloor \geq \frac{p-7}{8} \geq \frac{p-1}{4} - \frac{p-5}{6} \geq \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{6} \right\rfloor$.

Да приключим темата с една лесна и приятна задача за упражнение:

Задача 7. Даден е правилен 2001 многоъгълник $A_0 A_1 \dots A_{2000}$ вписан в единична окръжност. Да се докаже, че $|A_0 A_1| |A_0 A_2| \dots |A_0 A_{2000}| = 2001$.