

Подобни триъгълници описани и вписани един в друг

Владимир Барзов, Николай Николов

В доклада се разглеждат фамилиите от триъгълници, вписани и описани за даден триъгълник и подобни на него. Намерени са геометричните места на забележителни точки, свързани с тези фамилии.

1 Встъпление

Нека се условим "подобни" да наричаме триъгълници, които са подобни и **еднакво ориентирани**. Да разгледаме произволен триъгълник $\triangle ABC$ вписан в единична окръжност с център O . По-долу ще ползваме комплексни числа, като с малки букви ще означаваме афиксите на точките. Също така означението AB ще значи правата AB . Казваме, че $\triangle X_1Y_1Z_1$ е вписан в $\triangle ABC$, ако

$$X_1 \in BC, Y_1 \in CA, Z_1 \in AB.$$

Нека е даден втори триъгълник $\triangle XYZ$ вписан в единичната окръжност.

2 Общ вид на въртящата хомотетия

Да разгледаме фамилията $\Phi_{\triangle ABC}(\triangle XYZ) \equiv \Phi$ от всички триъгълници $\triangle X_1Y_1Z_1$ вписани в $\triangle ABC$ и подобни на $\triangle XYZ$. За всеки от тях съществува единствена линейна трансформация $\rho(w) = u_1w + v_1$, такава че

$$\rho(x) = u_1x + v_1 = x_1, \rho(y) = u_1y + v_1 = y_1, \rho(z) = u_1z + v_1 = z_1.$$

От $X_1 \in BC$ имаме

$$(1) \quad \frac{x_1 - b}{b - c} = \frac{\overline{x_1 - b}}{\overline{b - c}} \Rightarrow \frac{u_1x + v_1 - b}{b - c} = \frac{\overline{u_1x + v_1 - b}}{c - b} bc \Rightarrow u_1x + \frac{bc}{x}\overline{u_1} + v_1 + bc\overline{v_1} = b + c.$$

Аналогично от $Y_1 \in CA$ следва $u_1y + \frac{ca}{y}\overline{u_1} + v_1 + ca\overline{v_1} = c + a$. Като извадим от (1) получаваме

$$(2) \quad (x - y)u_1 + \left(\frac{bc}{x} - \frac{ca}{y}\right)\overline{u_1} + (bc - ca)\overline{v_1} = b - a.$$

По същия начин

$$(y - z)u_1 + \left(\frac{ca}{y} - \frac{ab}{z}\right)\overline{u_1} + (ca - ab)\overline{v_1} = c - b.$$

Разделяме последните две равенства съответно на $c(b - a)$ и $a(c - b)$ и ги изваждаме:

$$u_1 \left(\frac{ax(c - b) + by(a - c) + cz(b - a)}{ac(b - a)(c - b)} \right) + \left(b \frac{xy(a - b) + yz(b - c) + zx(c - a)}{xyz(a - b)(b - c)} \right) \overline{u_1} = \frac{a - c}{ac}.$$

Оттам

$$u_1t + \overline{u_1t} = -1,$$

където

$$(3) \quad t = \frac{ax(c-b) + by(a-c) + cz(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

Оттук необходимо условие Φ да е непразна фамилия е $t \neq 0$. Като спрегнем двете страни на (2) получаваме

$$\frac{(y-x)abc}{u_1(a-b)xy} + u_1 \frac{ax-by}{a-b} + v_1 = c.$$

Заместваме в горното равенство $\bar{u}_1 = \frac{-1-u_1t}{\bar{t}}$ от (3) и след упростиране получаваме

$$u_1p + v_1 = q,$$

където

$$(4) \quad p = \frac{ax^2(z-y) + by^2(x-z) + cz^2(y-x)}{yz(c-b) + zx(a-c) + xy(b-a)}, \quad q = \frac{xyc(b-a) + yza(c-b) + zxb(a-c)}{yz(c-b) + zx(a-c) + xy(b-a)}.$$

Тогава

$$(5) \quad \rho(w) = \frac{\mu}{t}(w-p) + q,$$

където μ е число с реална част $-\frac{1}{2}$.

3 Изследване на фамилията

Лема 1 *Фамилията $\Phi_{\triangle ABC}(\triangle XYZ)$:*

(а) *съвпада с празното множество, когато $\triangle XYZ$ е еднакъв и противоположен на $\triangle ABC$;*
(б) *съдържа във всички останали случаи безбройно много триъгълници, образи на $\triangle XYZ$ при трансформациите (5) за всички μ с реална част $-\frac{1}{2}$.*

Доказателство (а): Ще покажем, че $t = 0$ е еквивалентно на $x : y : z = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c}$. Дясната посока е очевидна - заместваме в (3) x, y, z с $\frac{\theta}{a}, \frac{\theta}{b}, \frac{\theta}{c}$. Остава да докажем лявата посока. Да предположим, че $t = 0$ и да запишем условието като

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Понеже векторите $(1, 1, 1)$ и $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ са линейно независими над $\mathbf{C}$, то

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Тогава $|x - \lambda_1| = |y - \lambda_1| = |z - \lambda_1| = |\lambda_2|$ и следователно различните x, y, z лежат едновременно на единичната окръжност и на окръжност с център λ_1 и радиус $|\lambda_2|$. Последното е възможно само ако двете окръжности съвпадат, откъдето $\lambda_1 = 0$ и $x : y : z = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c}$. С това (а) е доказана.

Доказателство (б): Считаме, че $\triangle XYZ$ не е еднакъв и противоположен на $\triangle ABC$, откъдето съответното t е различно от 0. Вземаме произволно число μ с реална част $-\frac{1}{2}$. Ще покажем че (5) изобразява $\triangle XYZ$ в триъгълник от Φ . Предвид че ρ запазва подобие то остава единствено да докажем, че образът $\triangle X_1Y_1Z_1$ на $\triangle XYZ$ под ρ е вписан в $\triangle ABC$. Ще се спрем единствено на $X_1 \in BC$. За целта е достатъчно да покажем, че е изпълнено

$$(6) \quad \frac{\mu t^{-1}(x-p) + q - b}{b-c} = \frac{\bar{\mu} \bar{t}^{-1}(\bar{x} - \bar{p}) + \bar{q} - \bar{b}}{c-b} b c.$$

Ще докажем първо следното равенство:

$$(7) \quad b + c - q - \bar{q}bc = \frac{x - p}{t}.$$

Преди да упростим изразите за p и q те изглеждаха така:

$$(8) \quad p = \frac{ax - by}{a - b} - \frac{t(y - x)abc}{\bar{t}(a - b)xy}, \quad q = c + \frac{1}{\bar{t}} \frac{(y - x)abc}{(a - b)xy}.$$

Последователно имаме

$$q + \bar{q}bc - b - c = (q - c) + bc(\bar{q} - \bar{c}) = \frac{1}{\bar{t}} \frac{(y - x)abc}{(a - b)xy} + \frac{1}{t} \frac{(y - x)b}{a - b} = \frac{1}{t} \left(x - \frac{ax - by}{a - b} + \frac{t(y - x)abc}{\bar{t}(a - b)xy} \right) = \frac{x - p}{t}.$$

Да се върнем на (6) - заместваме $\bar{\mu}$ с $-1 - \mu$ и (6) се превръща в

$$\mu \left(\frac{x - p}{t} - \frac{\bar{x} - \bar{p}}{\bar{t}} bc \right) + \left(q + \bar{q}bc - b - c - \frac{\bar{x} - \bar{p}}{\bar{t}} bc \right) = 0.$$

Като спрегнем двете страни на (7) виждаме, че

$$\frac{\bar{x} - \bar{p}}{\bar{t}} bc = b + c - q - \bar{q}bc = \frac{x - p}{t},$$

което показва, че изразите в скобите са 0, с което (6) е доказано.

За да завършим доказателството на лемата остава да отбележим, че при различни числа μ_1 и μ_2 с реална част $-\frac{1}{2}$ съответните трансформации ρ са различни. С това доказателството на лемата е завършено.

4 Геометрия

Да вземем някоя забележителна (т.е. фиксирана) точка W за $\triangle XYZ$, различна от P . Когато μ обхожда правата $Re(\mu) = -\frac{1}{2}$ образът на W обхожда правата през $q - \frac{w - p}{2t}$, перпендикулярна на вектора $\frac{w - p}{t}$.

Интересен е случаят когато $\mu = -\frac{1}{2}$. Понеже коефициентът на подобие на $\triangle X_1Y_1Z_1$ и $\triangle XYZ$ е $\frac{|\mu|}{|t|}$ и става минимален когато $|\mu|$ е минимално, т.е. в горния случай, можем да заключим, че съответният триъгълник $\triangle X_1Y_1Z_1$ е минимален за фамилията Φ . Нещо повече е вярно - в дадения случай $\triangle X_1Y_1Z_1$ е педален на Q относно $\triangle ABC$. Действително - от (7) имаме

$$\frac{q + b + c - \bar{q}bc}{2} = -\frac{1}{2}(q + \bar{q}bc - b - c) + q = \frac{-1}{2t}(x - p) + q = x_1,$$

значи X_1 е петата на перпендикуляра спуснат от Q върху BC . Аналогични съображения са приложими към Y_1 и Z_1 . Да кръстим този минимален триъгълник $\triangle X'Y'Z'$.

Нека вземем число μ с реална част $-\frac{1}{2}$ и аргумент $\arg(\mu) = 180^\circ + \varphi, \varphi \in (-90^\circ, +90^\circ)$. Разглеждаме трансформацията (5) за избраното μ и образа $\triangle X_1Y_1Z_1$ на $\triangle XYZ$ под ρ . Явно въртяща хомотетия с център Q , ъгъл φ и коефициент $|2\mu| = \sec(\varphi)$ изпраща $\triangle X'Y'Z'$ в $\triangle X_1Y_1Z_1$. Тогава цялата фамилия Φ се получава геометрично така: с център точка Q завъртаме лъчите QX' , QY' , QZ' на произволен ъгъл $\varphi \in (-90^\circ, +90^\circ)$ и пресечните точки на тези лъчи съответно със страните BC, CA, AB на $\triangle ABC$ образуват триъгълник, подобен и еднакво ориентиран на $\triangle XYZ$, вписан в $\triangle ABC$.

За да е пълно построението трябва да покажем как геометрично може да се получи точката

Q .

Ще докажем, че $\angle AQB = \angle C + \angle Z$ при $\angle C + \angle Z < 180^\circ$ и $\angle AQB = 360^\circ - \angle C - \angle Z$ в противен случай. Несъмнено аналогичните равенства са в сила и за ъглите $\angle BQC, \angle CQA$, така че точка Q е построима геометрично като пресечница на три окръжности. Остава да докажем твърдението.

За целта - ще покажем, че ориентираният ъгъл $\angle AQB$ е равен на $\angle C + \angle Z$. Последното е еквивалентно с

$$\frac{b-q}{a-q} \frac{x-z}{y-z} \frac{a-c}{b-c} \in R^+.$$

От (8) можем да се досетим, че аналогичните равенства за q са в сила, т.е.

$$q = b + \frac{abc}{t} \frac{x-z}{(c-a)xz} = a + \frac{abc}{t} \frac{z-y}{(b-c)zy}.$$

Следователно

$$\frac{b-q}{a-q} \frac{x-z}{y-z} \frac{a-c}{b-c} = \frac{yz}{xz} \frac{x-z}{z-y} \frac{b-c}{c-a} \frac{x-z}{y-z} \frac{a-c}{b-c} = \frac{(x-z)(\overline{x-z})}{(y-z)(\overline{y-z})} = \frac{|x-z|^2}{|y-z|^2} > 0.$$

С това доказахме нещо повече - $\frac{BQ}{AQ} = \frac{XZ}{AC} \frac{BC}{YZ}$. Подобно равенство важи за отношението $\frac{CQ}{BQ}$, така че

$$(9) \quad AQ : BQ : CQ = \frac{YZ}{BC} : \frac{ZX}{CA} : \frac{XY}{AB}.$$

5 Забележителни случаи

Видяхме, че ако $\triangle XYZ$ е подобен (еднакъв) на $\triangle ABC$, но противоположен, фамилията Φ е празно множество. По-интересни са случаите $\triangle XYZ \sim \triangle ABC, \triangle BCA$ или $\triangle CAB$.

Да разгледаме сериите $\Phi' = \Phi_{\triangle ABC}(\triangle BCA)$ и $\Phi'' = \Phi_{\triangle ABC}(\triangle CAB)$. За забележителните им точки p, q, t имаме:

$$t' = \frac{3abc - ab^2 - bc^2 - ca^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad t'' = \frac{ac^2 + cb^2 + ca^2 - 3abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad |t'| = |t''|,$$

което показва, че педалните триъгълници на Q' и Q'' са еднакви;

$$p' = q' = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)}{ac^2 + cb^2 + ba^2 - 3abc}, \quad q'' = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a+b+c)}{ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc}, \quad |q'| = |q''|,$$

откъдето Q' (респективно Q'') е неподвижна точка (център) на серията въртящи хомотетии $\rho' = \frac{\mu}{t'}(w - q') + q'$, а също така $OQ' = OQ''$.

Може да се докаже, че Q' и Q'' са вътрешни и изогонално спрегнати за триъгълника $\triangle ABC$, и

$$\angle Q'AB = \angle Q'BC = \angle Q'CA = \angle Q''AC = \angle Q''CB = \angle Q''BA = \theta, \quad \text{ctg} \theta = \frac{\cos \angle A \cos \angle B \cos \angle C + 1}{\sin \angle A \sin \angle B \sin \angle C}.$$

Притова при $Q' \neq Q''$ се случва $\angle Q'OQ'' = 2\theta < 60^\circ$.

Интересен факт: ако вземем това μ' с аргумент $\arg \mu' = 180^\circ + \theta$ полученият триъгълник $\triangle Z'Y'Z'$ -образ на $\triangle BAC$ под ρ' - има страни перпендикулярни на страните на $\triangle ABC$. Същото можем да направим с μ'' с аргумент $\arg \mu'' = 180^\circ - \theta$ за да получим триъгълник $\triangle X''Y''Z''$ от Φ'' , без съмнение еднакъв на $\triangle X'Y'Z'$. Последното ще го формулираме като задача.

Задача Точките P и Q от вътрешността на остроъгълен триъгълник ABC са такива, че $\angle PCA = \angle PAB = \angle PBC$ и $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$. Да се докаже, че:

а) петите на перпендикулярите от P и Q върху страните на триъгълника лежат на окръжност с център средата на PQ ;

б) ако O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, то $PO = QO$.

6 Описани триъгълници

Ще се интересуваме от фамилията триъгълници $\Sigma_{\triangle ABC}(\triangle XYZ) \equiv \Sigma$, описани около $\triangle ABC$ и подобни на $\triangle XYZ$. Ще намерим общия вид на линейните трансформации σ изпращащи $\triangle XYZ$ в $\triangle X_2Y_2Z_2$ от Σ .

Нека вземем конкретен триъгълник от Σ и да разгледаме съответната линейна трансформация σ , за която

$$x_2 = \sigma(x) = u_2x + v_2, y_2 = \sigma(y) = u_2y + v_2, z_2 = \sigma(z) = u_2z + v_2.$$

Тогава $\sigma^{-1}(\triangle X_2Y_2Z_2) = \triangle XYZ$. Ако $\sigma^{-1}(\triangle ABC) = \triangle A^*B^*C^*$, то явно $\triangle A^*B^*C^*$ е вписан в $\triangle XYZ$ и значи $\triangle A^*B^*C^* \in \Phi_{\triangle XYZ}(\triangle ABC) \equiv \tilde{\Phi}$. Тогава от (5) за трансформацията $\sigma^{-1}(w) = \frac{1}{u_2}w - \frac{v_2}{u_2}$ следва

$$u_2 = \frac{t^*}{\mu}, v_2 = p^* - \frac{t^*}{\mu}q^*,$$

където $Re(\mu) = -\frac{1}{2}$, а p^*, q^*, t^* се получават от p, q, t като разменим в (3) и (4) x, y, z съответно с a, b, c . Следователно

$$(10) \quad \sigma(w) = \frac{t^*}{\mu}(w - q^*) + p^*.$$

Заклучаваме, че за всяка фиксирана точка $W \neq Q^*$ за $\triangle XYZ$, образът ѝ W_2 под трансформациите (10) представлява окръжност с диаметър точките $-2t^*$ и p^* , но без самата точка p^* .

Проверява се, че $\frac{t}{t^*} = \frac{\bar{t}}{\bar{t}^*}$, така че $tt^* \in R$.

7 Хипербола

Ще се занимаем с частния случай $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$. Триъгълниците от Σ ще бележим с $\triangle A_2B_2C_2$, а тези от Φ с $\triangle A_1B_1C_1$. Както по-горе имаме H_2 и O_2 - ортоцентър и център на описаната окръжност за $\triangle A_2B_2C_2$. Ще използваме, че в дадения случай $t = t^* = 1, p = p^* = h, q = q^* = 0$. Като заместим в (5) имаме

$$(11) \quad \rho(w) = u_1(w - h) = \mu_1(w - h), \sigma(w) = \mu_2^{-1}w + h.$$

За всяко реално число $\varphi \in (-90^\circ, +90^\circ)$ съществуват единствени комплексни числа u_1 и u_2 с аргументи $arg(u_1) = arg(u_2) = 180^\circ + \varphi$, такива че $Re(u_1) = -\frac{1}{2}, Re(u_2^{-1}) = -\frac{1}{2}$. Тогава триъгълниците от Φ и Σ , получени от $\triangle ABC$ при съответните трансформации (11) са хомотетични. Нека центърът на тази хомотетия е s , а коефициентът ѝ е реалното число λ . Тогава

$$(12) \quad \frac{a_2 - s}{a_1 - s} = \lambda = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow s = h \frac{u_1(u_2 + 1)}{u_1 - u_2}.$$

За u_1 и u_2 разполагаме с условията $\frac{u_2}{u_1} \in R, Re(u_1) = -\frac{1}{2}, Re(u_2^{-1}) = -\frac{1}{2}$. Налице е системата

$$\begin{cases} u_1\bar{u}_2 = u_2\bar{u}_1 \\ u_1 + \bar{u}_1 = -1 \\ \bar{u}_2(1 + u_2) = -u_2 \end{cases}$$

Заместваем $\bar{u}_1$ и $\bar{u}_2$ от последните две условия в първото за да изразим u_2 чрез u_1 :

$$u_1 \frac{-u_2}{1 + u_2} = u_2(-1 - u_1) \Rightarrow u_2 = \frac{-1}{1 + u_1}$$

Последния израз замества в (12) и получаваме

$$s = \frac{hu_1^2}{u_1^2 + u_1 + 1} = h(\xi + i\eta).$$

Ако $r \in R$ е такава, че $u_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{r}{2}$ то

$$\xi + i\eta = \frac{1 - r^2}{3 - r^2} + i\frac{2r}{3 - r^2},$$

откъдето вече лесно проверяваме, че

$$(13) \quad (3\xi - 2)^2 - 3\eta^2 = 1.$$

Притова $\lambda = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{u_1\bar{u}_1} = 4\cos^2\varphi$ и значи коефициентът на подобие между $\triangle A_2B_2C_2$ и $\triangle A_1B_1C_1$ варира в интервала $(0, 4]$.

Несъмнено множеството от точките в комплексната равнина, удовлетворяващи (13) е хипербола. Тогава при $h \neq 0$, т.е. при неравностраничен $\triangle ABC$, множеството от точките s също е хипербола; притова нейните оси са правата през средата на GH , перпендикулярна на ойлеровата права, и самата ойлорова права. Също така всяка точка от хиперболата, с изключение на върха H на единия клон, е център на хомотетия за някоя двойка $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$. Проверява се, че фокуси на хиперболата са точката $F_1 = O$ и точката F_2 , такава че средата на F_1F_2 е и среда на GH . Тогава множеството от центровете на хомотетията може геометрично да се дефинира като множеството от тези точки $F \neq F_2$ в равнината, за които $|FO - FF_2| = GH$.